Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	5	**Tiempo total de ejecución**	5 horas
Enunciado de la progresión	Conceptualiza el límite de una función de variable real como una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento local de la gráfica de una función. (C1M1, C2M2, C4M1)		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C1:** Procedural. **C2**: Procesos de intuición y razonamiento. **C4:** Interacción y lenguaje matemático.
Subcategoría	**C1S1:** Elementos aritmético-algebraicos. **C2 S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2:** Pensamiento intuitivo. **C2S:** Pensamiento formal. **C4S1:** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico. **C4S2:** Negociación de significados.
Metas de aprendizaje.	**C1M1:** Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno. **C2M2:** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación. **C4M1:** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

REVISADO COBACH 34 "ALAN SAC JUN"

Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal. - Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.) - Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	**Docente:** Se sugiere empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar largamente su auténtica importancia. Sin límites el cálculo sencillamente no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido. Ahora presenta las siguientes preguntas detonadoras y se contestan en forma grupal. 1.- ¿Qué es la velocidad instantánea? 2.- ¿Qué es la pendiente de una curva? 3.- ¿Qué es la longitud de una curva? 4.- ¿Qué indica cuando la pendiente es cero? Después de contestar las preguntas. El docente presenta la siguiente diapositiva. **Anexo 1**. Prog. 5. Para concluir con las definiciones de acuerdo al límite de una función. La segunda diapositiva dará paso para dar la idea intuitiva sobre el Límite de una función.	60 min	Pizarrón Plumón. proyector	No aplica

Desarrollo	**Docente:** Par empezar a analizar el límite de una función se analiza $f(x)= x^2 - 1$ para ver la aproximación por la derecha y por la izquierda, analizando la siguiente tabla sagital. **Anexo 1. Diapositiva 3.** Integrados en equipo de 4 realizan la aproximación de la función, por la derecha y por la izquierda cuando “x” tiende a 2. Dada la función $y = f(x) = 2x - 1$, veamos que sucede cuando la variable x se aproxima a un valor dado, que llamaremos c, no nos interesa lo que sucede exactamente en c. Una vez terminado la actividad cada equipo deberá indicar a que numero tiende la función para que mantenga la continuidad. Después el docente proyecta la **diapositiva numero 4**… para que cada equipo confirme lo que hicieron y empezar a ver la noción o notación de limite. **Diapositiva 5.** El docente explica cómo es la representación de los limites laterales. $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ significa: cuando “x” se aproxima a “c” por la izquierda el valor de la función se acerca a L. $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ cuando “x” se aproxima a “c“ por la derecha el valor de la función se acerca a L. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ esto es equivalente a la existencia simultanea de los dos limites laterales.	30 min 30 min	Cuaderno cuadriculado, Lápiz. Proyector Laptop	Lista de cotejo **Anexo2** No aplica

	El docente presenta las propiedades de los limites **Diapositiva 6.** Y ejemplifica con ejercicios de acuerdo a su criterio. Continuando con los equipos. Se les provee el siguiente ejercicio para que la desarrollen de acuerdo al límite de una función. **Diapositiva 7.** Docente: Presenta la **Diapositiva 8 y 9.** Para explicar cuando la función no está definida incluyendo los limites infinitos.	60 min 20 min 50 min	Cuaderno Y lápiz	Guía de observación **anexo 2** No aplica
Cierre	**Docente.** Entrega a cada equipo el ejercicio de la **Diapositiva 10.** que demuestren cuáles tienen limite, cuáles son los limites indeterminados y cuál de ellas necesitan un procedimiento de factorización.	50 min	Cuaderno y lápiz	Lista de cotejo

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
	https://www.youtube.com/watch?v=o2UTk8bsLS0 https://www.youtube.com/watch?v=EYcwxYab0Qk https://www.youtube.com/watch?v=QEoHDt-7JS0 https://www.youtube.com/watch?v=PZhTK99o1pk	http://biblio3.url.edu.gt/Libros/2012/calc/2.pdf https://www.cimat.mx/ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo_cap1.pdf

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS PLANTEL 34 "ALAN SAC JUN" CLAVE:07ECB0079X

REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

ANEXO 1. Prog.5.

Límites y continuidad

Podríamos empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar largamente su auténtica importancia. Sin límites el cálculo sencillamente no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido.

¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias.

¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de la longitud de los caminos poligonales.

¿Qué es la suma de una serie infinita? Es el límite de las sumas finitas.

¿Qué es el área de una región limitada por curvas? Es el límite de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas poligonales.

Diapositiva 2

Idea intuitiva del límite

Empezamos con un número c y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c. El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c, y se escribe

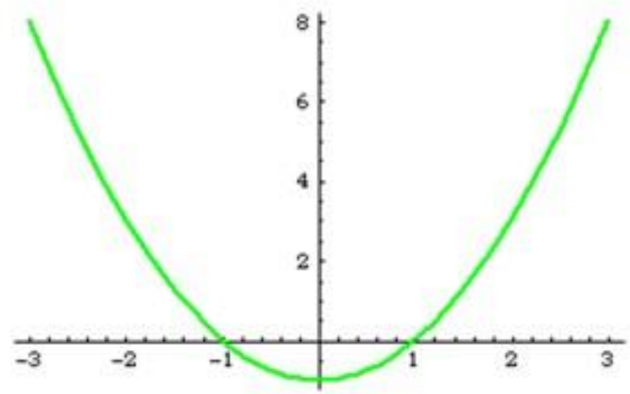
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función f(x) se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c.

Diapositiva 3

Consideremos la función: $f(x) = x^2 - 1$

x	f(x)
1.9	2.61
1.99	2.9601
1.999	2.996001
1.9999	2.99960001
2.0001	3.00040001
2.001	3.004001
2.01	3.0401
2. 1	3.41



Cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, f(x) se aproxima, es decir, tiende cada vez más a 3.

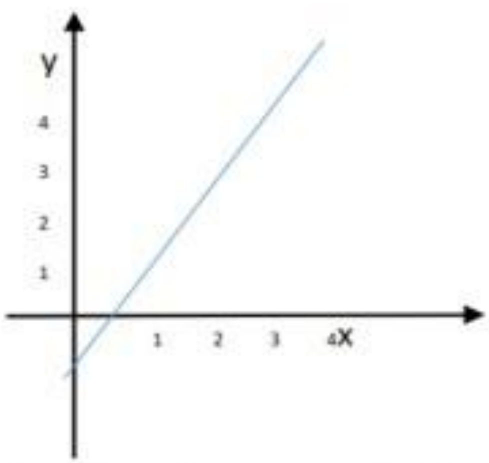
Diapositiva 4

Analicemos a que valor se acerca la función $f(x) = 2x - 1$ cuando x se acerca a 2, sin importarnos que sucede en x= 2.

Los valores de x se acercan a 2 por la izq. Los valores de x se acercan a 2 por la der.

x	1,96	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,04
y	2,92	2,96	2,98	-	3,02	3,04	3,08

En la tabla se observa que a medida que los valores de x se acercan a 2 por la izquierda y por la derecha los valores de la función se acercan cada vez más al valor 3.



El valor al cual se acerca la función $f(x)$, cuando x se acerca a c, lo llamaremos límite L.

Diapositiva 5

Se simboliza:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Se lee: Límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a c, es igual a L.

Conclusión: El límite de la función $f(x) = 2x - 1$ cuando x tiende a 2 es igual a 3.

Se escribe:

$$\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 2(2) - 1 = \mathbf{3}.$$

Nota. $\lim_{x \to c} f(x) = L$

nos indica como se comporta la función en las cercanías al valor c. tanto por la derecha como por la izquierda, pero no necesariamente en el valor c.

Diapositiva 6

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

- Si una función tiene límite en un punto, éste es **único**.

- Si una función tiene límites laterales distintos en un punto, entonces no tiene límite en ese punto.

- Si f y g tienen límites en x_0 y k es un número se verifica que:

$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}k\cdot f(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f\circ g)(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)$
$\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$

Diapositiva 7

En los problemas del 1 al 6 determine el límite que se indica.

1. $\lim_{x \to 3} (x - 5)$

2. $\lim_{t \to -1} (1 - 2t)$

3. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2x - 1)$

4. $\lim_{x \to -2} (x^2 + 2t - 1)$

5. $\lim_{t \to -1} (t^2 - 1)$

6. $\lim_{t \to -1} (t^2 - x^2)$

Diapositiva 8

Consideremos la función: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \quad x \neq 1$

Esta función no está definida en x=1; sin embargo vamos a estudiar su comportamiento en los alrededores de x=1.

x se acerca a 1 por la izquierda ⟶ ⟵ x se acerca a 1 por la derecha

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
f(x)	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5

$f(x)$ se acerca a 2 ⟶ ⟵ $f(x)$ se acerca a 2

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

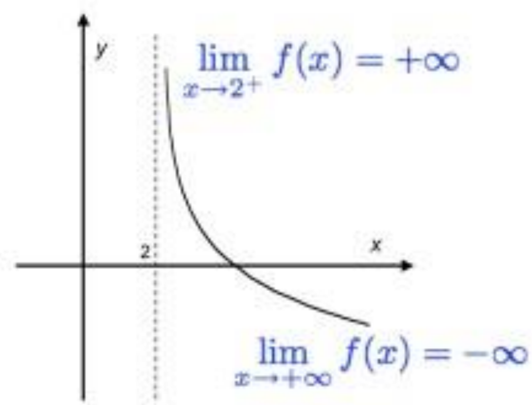
Límites laterales

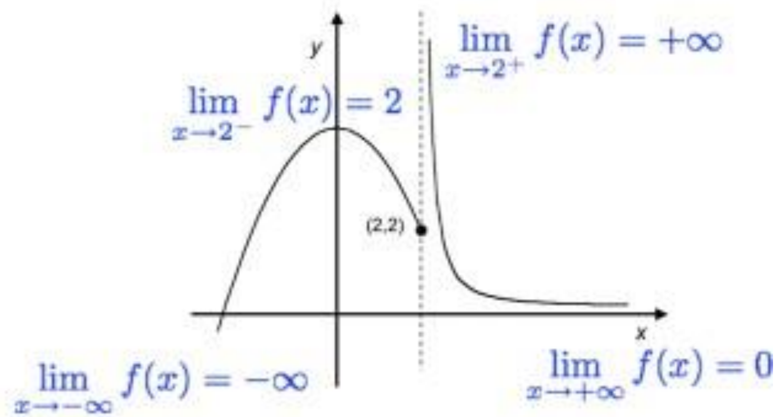
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

También podemos hablar de límites infinitos y límites en el infinito.

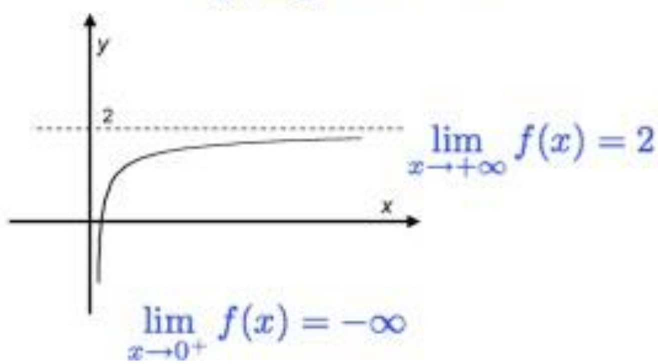
Si una función f(x) crece indefinidamente cuando el valor de la variable x tiende a a, se dice que su límite es infinito ($+\infty$, si el crecimiento es en sentido positivo, y $-\infty$, si lo es en sentido negativo).

Análogamente, también es posible definir límites de una función cuando el valor de x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.





Diapositiva 8



Cálculo de límites infinitos

Diapositiva 9

Para calcular el límite de una función suelen aplicarse las propiedades generales de los límites. Sin embargo, a veces aparecen indeterminaciones que es preciso resolver.

Infinito entre infinito: si se trata de funciones polinómicas, se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado. Si las funciones presentan radicales, se multiplican el denominador y el numerador por el conjugado de la expresión que contiene el radical.

Cero entre cero: si se trata de funciones polinómicas, se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los polinomios iguales resultantes. En funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cero por infinito: si $f(x)$ tiende a 0, y $g(x)$ tiende a infinito, la expresión $f(x) \cdot g(x)$ se puede sustituir por $f(x)/(1/g(x))$, que es del tipo $0/0$. También podemos sustituir $f(x) \cdot g(x)$ por $g(x)/(1/f(x))$ que es una indeterminación del tipo infinito entre infinito.

Infinito menos infinito: si se trata de una diferencia de funciones, se realiza la operación de manera que se obtenga una expresión como cociente de funciones, para después calcular el límite. Si aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Diapositiva 10

11. $\lim_{x \to 0} (2x - 1) = -1$

12. $\lim_{x \to -21} (3x - 1) = -64$

13. $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

14. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x^2 - x}{x} \right) = -1$

15. $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x - 5} = 9$

16. $\lim_{x \to 1} \sqrt{2x} = \sqrt{2}$

17. $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x - 1}}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{7}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{14x^2 - 20x + 6}{x - 1} = 8$

19. $\lim_{x \to 1} \frac{10x^3 - 26x^2 + 22x - 6}{(x - 1)^2} = 4$

20. $\lim_{x \to 1} (2x^2 + 1) = 3$

21. $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x - 1) = 2$

22. $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$

ANEXO 2. Lista de cotejo. Actividad 1. Diapositiva 4.

Numero de equipo	Semestre Grupo	Progresión
		5
Valor Porcentual	INSTRUCCIONES: esta actividad será evaluado tu equipo con el siguiente instrumento. Valora lo aprendido; Coloca una X en el porcentaje de comprensión que tienes de cada aspecto.	

NOMBRE DE LOS INTEGRANTES:

1.____ **2.**____

3.____ **4.**____

ASPECTO	AL 100%	ENTRE 80% Y 90%	ENTRE 60% Y 70%	RETROALIMENTAR
¿El estudiantado sustituye correctamente los valores de x?				
¿El equipo participa de manera colaborativa durante el análisis de este ejercicio?				
¿El equipo se aproxima al límite de la función?				

Guía de observación para ejercicio de diapositiva 7.

Nombre de la UAC: **PENSAMIENTO MATEMATICO III**		Semestre/grupo:	**Puntaje**
Fecha:			
Integrantes del equipo: 1.________________________________ 2.________________________________ 3.________________________________ 4.________________________________			
ACTIVIDAD DE CIERRE			
Acciones a evaluar	Registro de cumplimiento SI	NO	Observaciones
El equipo desarrolla con facilidad cada ejercicio			
El equipo le dificulta identificar el límite de la función,			
El equipo aplica correctamente el teorema del límite,			
El equipo solicito retroalimentación durante la resolución			

LISTA DE COTEJO PARA ACTIVIDAD DE CIERRE.

Integrantes: ____ Plantel: ______________________________
____ Semestre y grupo: ______________________

No.	Criterios	Valoraciones		
		Si	No	Observaciones
1	Trabajan de manera colaborativa para resolver el planteamiento			
2	Identifican los limites indeterminados en cada ejercicio.			
3	Presentan dificultad al sustituir el valor de la variable en cada límite.			
4	Mantiene una actitud de respeto y tolerancia hacia el desarrollo de la actividad			
5				

Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	6	**Tiempo total de ejecución**	5 horas
Enunciado de la progresión	Identifica y contextualiza la continuidad de funciones utilizadas en la modelación de situaciones y fenómenos y hace un estudio, utilizando el concepto de límite, de las implicaciones de la continuidad de una función tanto dentro del desarrollo matemático mismo, como de sus aplicaciones en la modelación. (C4M2)		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C4:** Interacción y lenguaje matemático
Subcategoría	**C2S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2:** Pensamiento Intuitivo. **C4S3:** Ambiente matemático de comunicación.
Metas de aprendizaje.	**C2M1:** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo. **C4M2:** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.) - Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.

REVISADO COBACH 34 "ALAN SAC JUN"

Abordaje de la progresión del aprendizaje[4]			
Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**

Apertura	El estudiante en apoyo con el docente, utiliza imágenes de gráficas, propiedades y demás elementos y lleva a cabo la creación de un memorama. Los estudiantes organizados en binas jugaran el memorama construido, con el propósito de recordar las progresiones vistas con anterioridad.	30 minutos 30 minutos	Proyector Laptop Papel cascaron Imágenes de graficas	Es una evaluación diagnostica
Desarrollo	Exposición de parte de docente acerca del tema • Continuidad de funciones. • diversas formas de factorización de funciones racionales Revisar ANEXO 1 PM3 PG6 Los estudiantes organizados en equipo llevan a cabo la solución de los ejercicios planteados en el anexo. ANEXO 2 PM3 PG6	120 min 60 minutos	proyector Laptop	Lista de cotejo
Cierre	Los estudiantes organizados en equipo llevan a cabo la evaluación propuesto en el anexo. ANEXO 3 PM3 PG6	60 minutos	Hojas blancas	evaluación

Fuentes de consulta		
BIBLIOGRÁFICA	**VIDEOGRÁFICA**	**PÁGINAS WEB**
	1)	

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS PLANTEL 34 "ALAN SAC JUN" CLAVE:07ECB0079X

REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

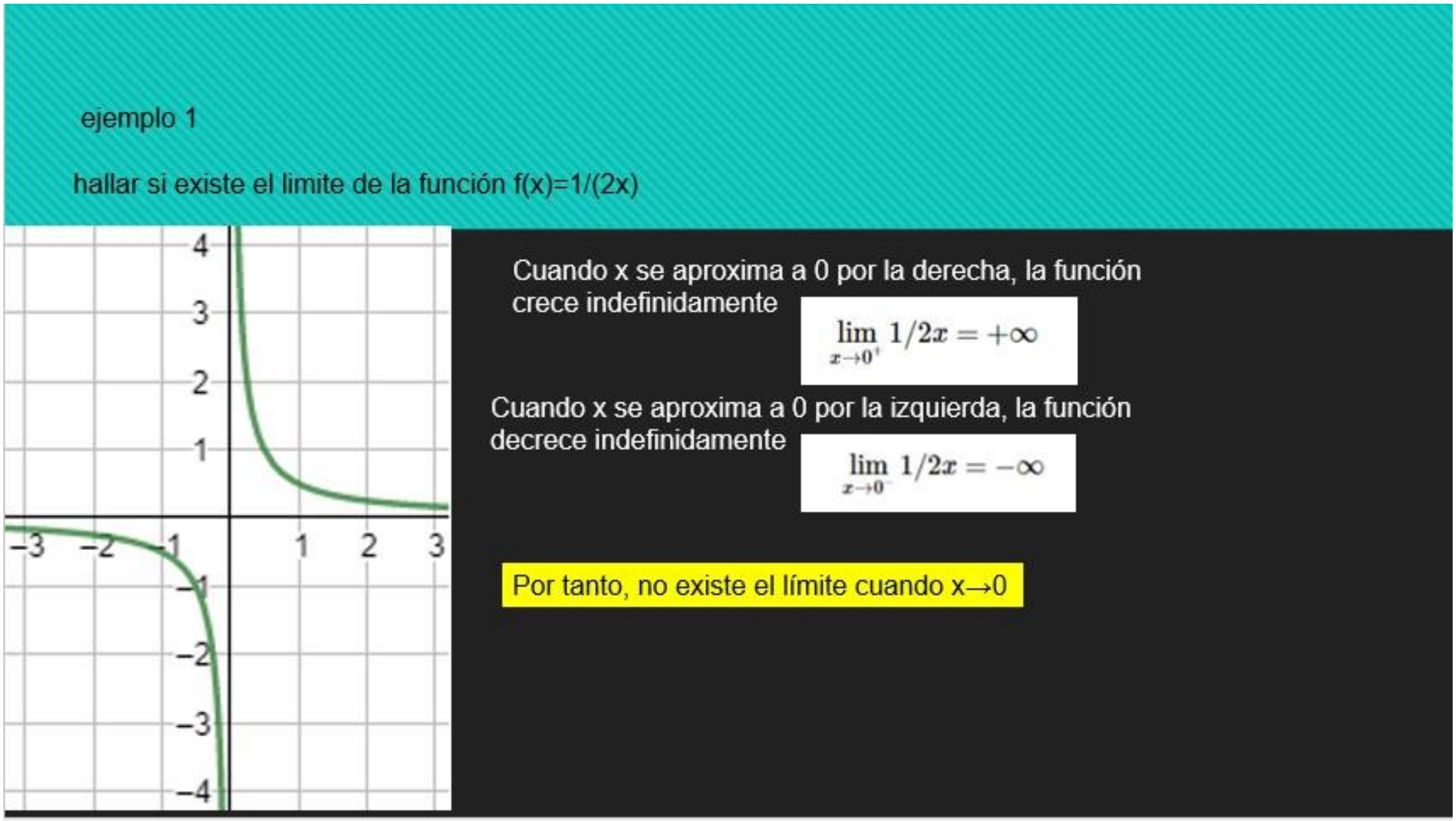
ANEXO 1 PM3 PG6

Condiciones de continuidad para funciones Racionales

una función f(x) se dice continua en un punto “a” si se cumplen tres condiciones:

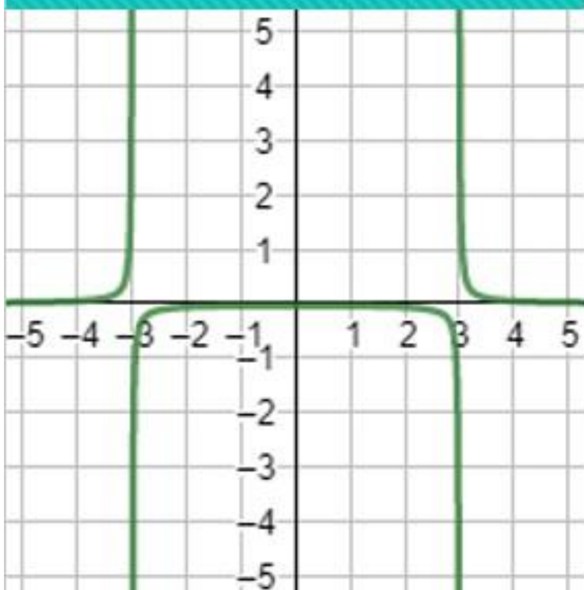
1) El límite de f(x) cuando x se aproxima a “a” existe, es decir, los límites laterales en el punto “a” coinciden.
2) El valor de f(a) está definido. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
3) El límite de f(x) cuando x se aproxima a “a” es igual a f(a).

Cuando no se cumple alguna de las anteriores condiciones, se dice que la función es **discontinua** en el punto.


ejemplo 1
hallar si existe el limite de la función f(x)=1/(2x)
Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, la función crece indefinidamente
$\lim_{x \to 0^+} 1/2x = +\infty$
Cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, la función decrece indefinidamente
$\lim_{x \to 0^-} 1/2x = -\infty$
Por tanto, no existe el límite cuando x→0
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
1
2
3

ejemplo 2

hallar los limites de $f(x) = \frac{1}{3x^2 - 27}$



Como es una función racional, el dominio es el conjunto de los reales excepto donde se anula el denominador. Para hallar estos puntos, igualamos el denominador a 0 y resolvemos la ecuación:

$$3x^2 - 27 = 0$$
$$x^2 = \frac{27}{3}$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Por tanto, el dominio es el conjunto de los reales excepto −3 y 3
Dom(f)=R−{−3,3}

La función es continua en todo su dominio.

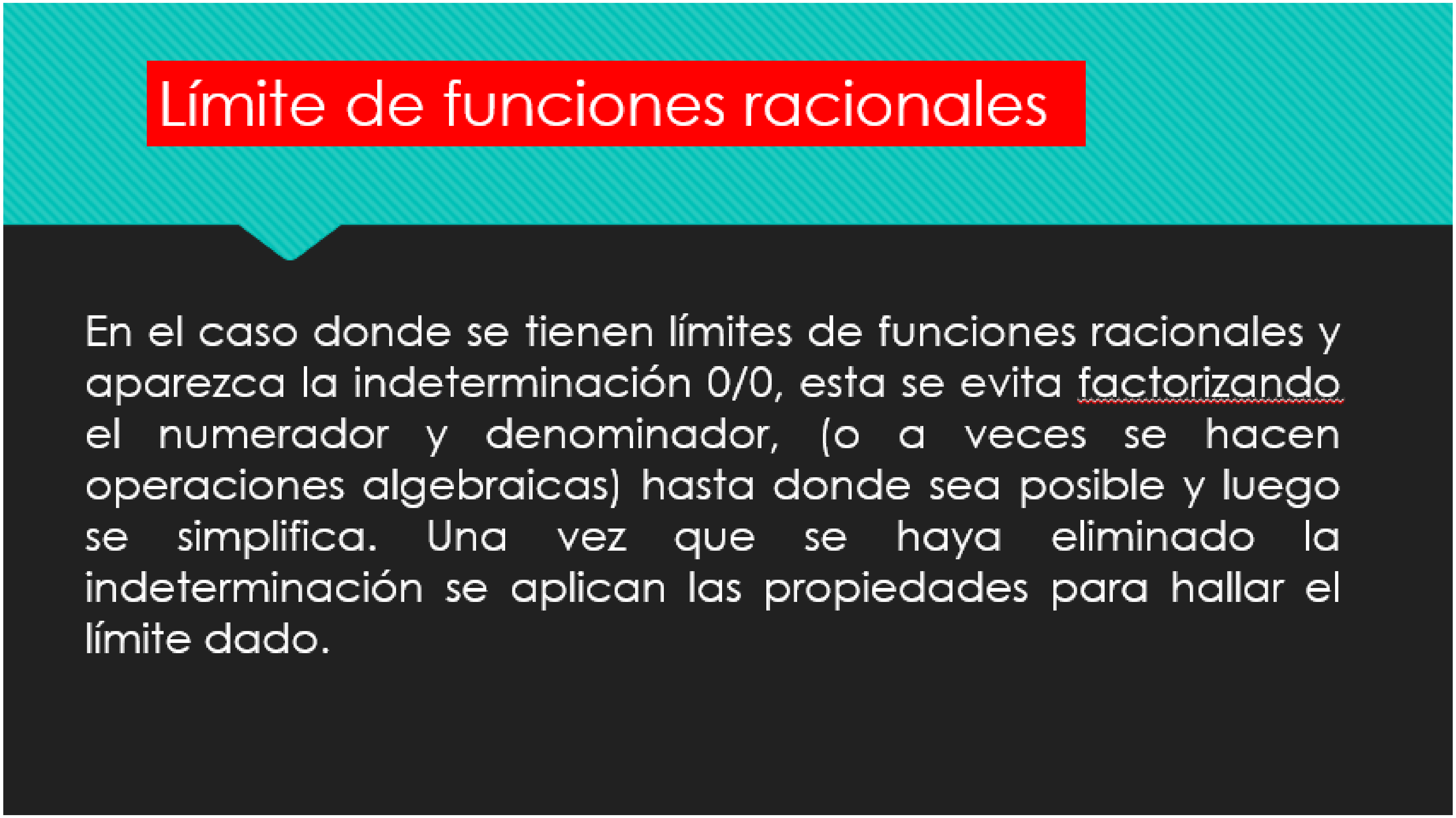
Cuando x se aproxima a los puntos de discontinuidad, la función crece/decrece indefinidamente:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$$

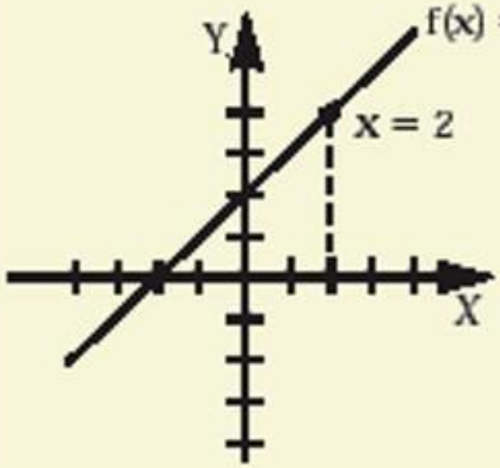
$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$


Límite de funciones racionales
En el caso donde se tienen límites de funciones racionales y aparezca la indeterminación 0/0, esta se evita factorizando el numerador y denominador, (o a veces se hacen operaciones algebraicas) hasta donde sea posible y luego se simplifica. Una vez que se haya eliminado la indeterminación se aplican las propiedades para hallar el límite dado.

Ejemplo 1



$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\,(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

La discontinuidad se evita añadiendo a la función el punto (2, 4), es decir:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ para } x \neq 2 \\ f(x) = 4 \text{ para } x = 2 \end{cases}$$

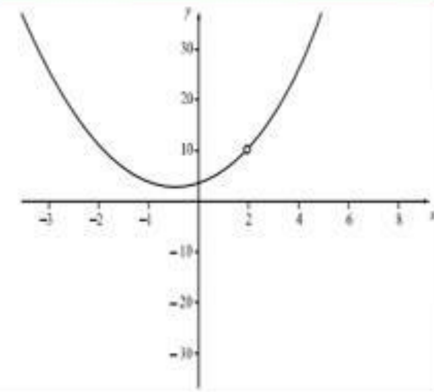
¿Cuál es el $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$?

Solución: nuevamente tanto el numerador como el denominador se hacen 0 cuando $x = 2$, lo que significa que este valor no pertenece al dominio de la función y que podemos simplificar la expresión de la siguiente manera después de factorizar el numerador:

$$\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)\ (x^2+2x+4)}{(x-2)} = x^2+2x+4 \text{ para valores } x \neq 2$$

Gracias a esta simplificación se puede calcular el límite sin ningún problema:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \to 2}\ (x^2+2x+4) = 12$$



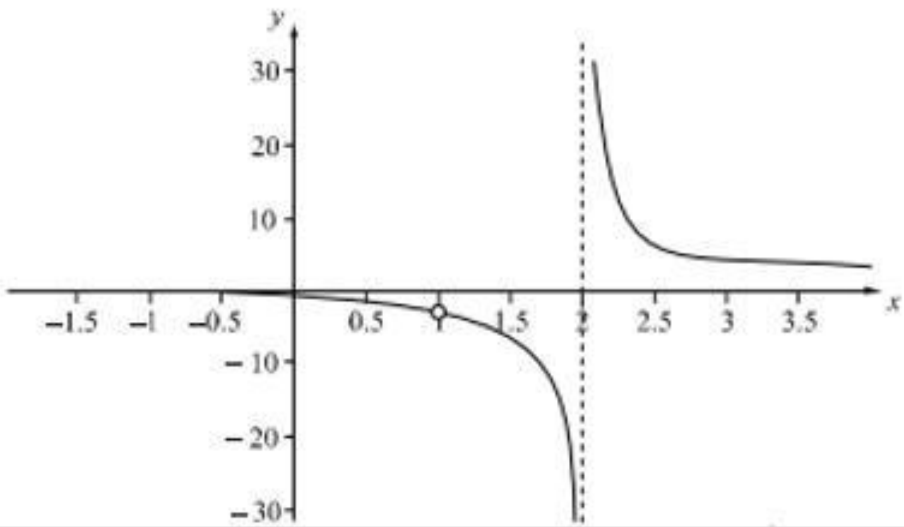
¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$?

Solución: por la misma razón de los ejemplos anteriores procedemos primero a simplificar la expresión dada, que está indeterminada cuando $x = 1$

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)\ (x+1)}{(x-1)\ (x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \quad \text{para } x \neq 1$$

Gracias a la nueva expresión podemos calcular el límite sin ningún problema sustituyendo el valor de x por 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2} = \frac{2}{-1} = -2$$



¿Cuál es el $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$?

Solución: cuando $x \to 9$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero, conduciéndonos a una expresión inderterminada de la forma $\frac{0}{0}$.

Al tener una raíz en el numerador, se racionalizará para lo cual multiplicaremos tanto el numerador como el denominador por el conjugado y una vez cancelada la raíz se obtiene el límite.

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

Observemos que el valor $x = 9$ no pertenece al dominio de la función.

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{2x+1}$$

Por **sustitución directa** tenemos que

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{2x+1} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{4\left(\frac{1}{4}\right)-1}{-1+1} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos una **indeterminación** de la forma $\frac{0}{0}$. Para eliminarla factorizamos el numerador y denominador si es posible. Entonces

$$4x^2-1 = (2x-1)(2x+1)$$
Diferencia de cuadrados perfectos

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{2x+1} = \lim_{x\to -1/2} \frac{(2x-1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to -1/2} (2x-1) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -1-1 = -2$$

Luego

$$\lim_{x\to -1/2} \frac{4x^2-1}{2x+1} = -2$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+x^2-5x-5}$$

De nuevo aplicando la **sustitución directa** tenemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+x^2-5x-5} = \frac{2(-1)^2-(-1)-3}{(-1)^3+(-1)^2-(-1)-1} = \frac{2+1-3}{-1+1+1-1} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos una **indeterminación** de la forma $\frac{0}{0}$. Para eliminarla factorizamos el numerador y denominador si es posible. Así factorizando

Trinomio de la forma: $2x^2-x-3 = \frac{(2x-3)(2x+2)}{2} = \frac{(2x-3)\,2\,(x+1)}{2} = (2x-3)(x+1)$

Factor comun por agrupacion: $x^3+x^2-5x-5 = (x^3+x^2)-(5x+5) = x^2(x+1)-5(x+1)$

$$= (x^2-5)(x+1)$$

Luego tenemos

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+x^2-5x-5} = \lim_{x\to -1} \frac{(2x-3)\cancel{(x+1)}}{(x^2-5)\cancel{(x+1)}} = \lim_{x\to -1} \frac{2x-3}{x^2-5} = \frac{2(-1)-3}{(-1)^2-5} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

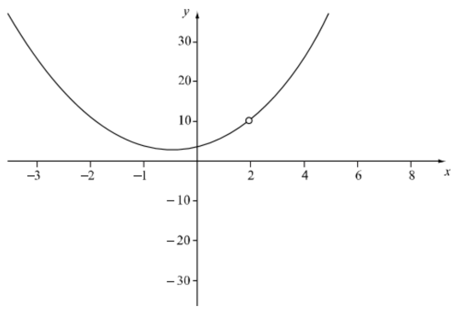
En consecuencia

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+x^2-5x-5} = \frac{5}{4}$$

ANEXO 2 PM3 PG6

Colegio de Bachilleres de Chiapas

En equipo soluciona los siguientes ejercicios



a) Observa la gráfica y contesta ¿Qué significa que la gráfica en x = 2 tenga un hueco?

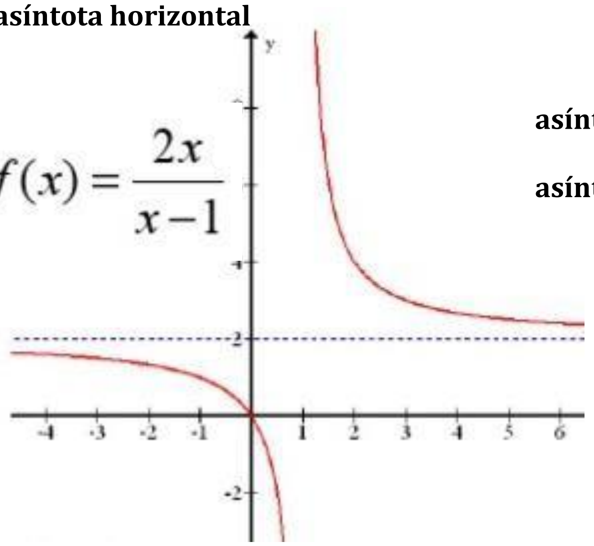
____
____
____
____
____

b) Hallar el límite de la siguiente expresión $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

c) ¿Cuál es el $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$?

d) atraves de la gráfica y la ecuación determine las ecuaciones de la asíntota vertical y la asíntota horizontal

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$



asíntota horizontal

asíntota vertical

ANEXO 3 PM3 PG6

Colegio de Bachilleres de Chiapas

Propuesta de evaluación

Nmbre:____ **calificación:**________

a) Analiza cada reactivo y determina la respuesta correcta

1. ¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$?

a) –1/3
b) 1/3
c) –2/3
d) 2/3

2. ¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-1)}{x^2}$?

a) –1
b) ¼
c) No existe.
d) 2

3. ¿Cuál es el $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$?

a) 2/3
b) 3
c) No existe.
d) –3

4. Determina si la función dada es continua en el valor especificado de x.

$$f(x)=\frac{2x+1}{3x-6},\quad x=2$$

5. Enumera los valores de x para los que la función dada no es continua.

$$f(x)=\frac{3x-2}{(x+3)\quad(x-6)}$$

INSTRUMENTOS DE EVALUACION

Colegio de Bachilleres de Chiapas

Lista de cotejo para evaluar ejercicios

Alumno:			**UAC:**				
Sem/grupo:		**No. De Progresión:**		**Fecha de aplicación:**			

Indicadores de presencia		**Opciones**				**Puntaje**
		E	**S**	**I**	**N**	
1	El estudiante se integró para llevar a cabo la actividad.					
2	El equipo realiza todos los ejercicios planteados					
3	El equipo realiza y aplica, los procedimientos adecuados en los reactivos 2 y 3					
4	El estudiante completa los ejercicios en tiempo y forma					
		Total de puntos				

E	Excelente	25-23 puntos
S	Suficiente	22-15 puntos
I	Insuficiente	14-5 puntos
N	Nada	4-0 puntos

Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	7	**Tiempo total de ejecución**	4 horas
Enunciado de la progresión	Interpreta, a partir de integrar diferentes perspectivas y métodos, el concepto central del cálculo diferencial, "la derivada", de forma intuitiva e intenta dar una definición formal, así como la búsqueda heurística para encontrar la derivada de la función constante, lineal y algunas funciones polinomiales.		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C1**: Procedural. **C2:** Procesos de intuición y razonamiento.
Subcategoría	**C1S2:** Elementos geométricos. **C1S3:** Elementos variacionales. **C2S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2:** Pensamiento Intuitivo.
Metas de aprendizaje.	**C1M2:** Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto. **C2M2:** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	- Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal. -Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	A través de lluvia de ideas, se recuperarán los conocimientos previos del estudiantado en las progresiones anteriores como son: límite de una función, recta tangente a una curva, funciones constates y lineales. Para ello el docente puede plantear las interrogantes de **PG 07 anexo 1.** En plenaria el docente proyecta el video **"la interpretación geométrica de la derivada".** https://www.youtube.com/watch?v=HmCuc7EpYjM&ab_channel=WillyMath	20 min. 10 min.	Plumones Pizarrón Proyector Computadora	No aplica
Desarrollo	El docente presenta y explica la manera de obtener la pendiente de una recta de una función en un valor dado (**Diapositiva 1), a**plicando la definición que a continuación se menciona. Sea f una función en un intervalo abierto que contiene a a. la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) es $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ siempre y cuando el límite exista. La cual puede ser explicada mediante una gráfica de una función, trazando los puntos fijos (x, f(x)) y (a, f(a)). El estudiantado resuelve ejercicios prácticos donde determina la pendiente de una recta. **Ver PG 07 Anexo 2.** El docente expone y ejemplifica la manera de calcular la derivada de una función utilizando la definición (**Diapositiva 1 a 7)**. Para ello se introduce una nueva variable Δx talque x = a + Δx, de donde se deduce que $\Delta x = x - a$, haciendo los cambios en la definición anterior. Se obtiene la siguiente definición. Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a, la derivada de f en a, denotada por f´(a) está dada por $$f´(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$ **Definición de derivada.** Si una función es derivable para todo valor de x, se obtiene una función f´(x) llamada la derivada de f(x), el valor de f´ en x esta dado por el siguiente límite $$f´(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ Nótese que la definición anterior x es fijo, pero arbitrario, por lo que se está obteniendo la derivada para todo valor x.	30 min. 120 min.	Laptop Proyector Libreta Lápiz Libreta Lápiz	Lista de cotejo

	La definición de derivada es conocida como cociente de Newton, derivada por incrementos, derivada por la regla de los cuatro pasos (se hace cada paso por separado). Diferentes formas de representar a la deriva de una función son: $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = D(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$			
Cierre	El docente forma binas y propone ejercicios prácticos. **Ver PG 07 Anexo 3.** El estudiantado resuelve en binas los ejercicios propuestos, entregando en tiempo y forma.	60 min	Hojas impresas Lápiz. Libreta	Listas de cotejo

Fuentes de consulta

BIBLIOGRÁFICA	VIDEOGRÁFICA	PÁGINAS WEB
Swokowski, E. W. (1987) INTRODUCCION AL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA, México, Editorial Iberoamericana.	https://www.youtube.com/watch?v=HmCuc7EpYjM&ab_channel=WillyMath	

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastian Díaz Gálvez

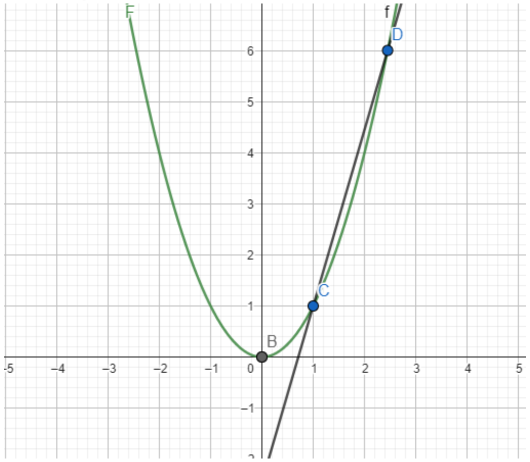
REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

PG 07 Anexo 1

1. Resuelve el límite $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-16} =$

2. Después de observa la siguiente gráfica ¿Qué interpretación tiene que el punto D se aproxime al punto C y se traslapen?



3. Menciona un ejemplo de una función constante.

4. Menciona un ejemplo de una función lineal.

5. ¿Cómo se determina la pendiente de la recta?

PG 07 Anexo 2

1. Determina la pendiente de la recta de la función $f(x) = 4x - 2$, en x = 2.

2. Determina la pendiente de la recta de la función $f(x) = 2x^2$, en x = -2.

3. Determina la pendiente de la recta de la función $f(x) = -x^2$,, en x = 1.

4. Determina la pendiente de la recta de la función $f(x) = 4x - x^2$, en x = 5

PG 07 Anexo 3.

Usando la regla de los cuatro pasos, encuentra la derivada de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 20$
2. $f(x) = -9$
3. $f(x) = x$
4. $f(x) = 9x + 7$
5. $f(x) = -8x$
6. $f(x) = c$
7. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$
8. $f(x) = x^2 - 4$
9. $f(x) = \frac{2}{3}$
10. $f(x) = \frac{1}{5}x$

INSTRUMENTOS DE EVALUACION

Lista de cotejo para evaluar la actividad de desarrollo.

Nombre: ____ Plantel: ____________________ Fecha de aplicación: _____________

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN (20 puntos)
	SI	NO	
1. Respondieron a todas las preguntas.			
2. Contestaron correctamente todos los ejercicios.			
3. Argumentaron correctamente.			
4. Entregaron la actividad en tiempo indicado.			
5. Realiza el procedimiento correcto para cada ejercicio.			
6. La solución de cada ejercicio es ordenada.			
Nota: Cabe mencionar que la ponderación puede cambiarse de acuerdo a cada docente.			

TOTAL:

Lista de cotejo para evaluar la actividad de cierre.

Nombres: ____ Plantel: __________________ Fecha de aplicación: ____________

Aspecto a evaluar	CUMPLIMIENTO		PONDERACIÓN (20 puntos)
	SI	NO	
1. Respondieron todos los ejercicios.			
2. Escucha con respeto a su compañero.			
3. Respondieron ordenadamente todos los ejercicios.			
4. Realizaron todos los pasos para cada ejercicio.			
5. Entregaron la actividad en tiempo indicado.			
6. Obtuvieron los resultados correctos en cada uno de los ejercicios.			
Nota: Cabe mencionar que la ponderación puede cambiarse de acuerdo a cada docente.			
			TOTAL:

Datos generales					
Plantel	34 Alan Sac´jun	**Coordinación**	Selva	**Semestre**	Tercero
Ubicación del plantel	Chilón	**UAC**	Pensamiento Matemático III		

Datos de la progresión del aprendizaje			
Etapa de la progresión (Número)	8	**Tiempo total de ejecución**	8 horas
Enunciado de la progresión	Encuentra de manera heurística algunas reglas de derivación como la regla de la suma, la regla del producto, la regla del cociente y la regla de la cadena y las aplica en algunos ejemplos.		

Elementos presentes en la progresión del aprendizaje	
Categoría	**C2:** Procesos de intuición y razonamiento. **C3** Solución de problemas y modelación.
Subcategoría	**C2S1:** Capacidad para observar y conjeturar. **C2S2:** Pensamiento intuitivo. **C2S3:** Pensamiento formal. **C3S3:** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.
Metas de aprendizaje.	**C2M3:** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos. **C3M4:** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.
Aprendizaje de trayectoria. (equivale al perfil de egreso)	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana.). Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Abordaje de la progresión del aprendizaje				
	Descripción de la estrategia o actividad	**Tiempo de ejecución**	**Recursos/ material didáctico**	**Instrumentos de evaluación.**
Apertura	Encuadre. A través de una lluvia de ideas, se recupera desde el abordaje de las progresiones anteriores de nuestro estudiantado, respecto a el límite de una función, la definición fundamental del cálculo y la interpretación geométrica de la derivada. Proyectar el siguiente video: “Derivadas: clase completa desde cero”. https://www.youtube.com/watch?v=_6-zwdrqD3U	60 min.	Pizarrón Plumones Proyector Lap Top	Es una evaluación diagnostica informal.
Desarrollo	El estudiantado elabora un mapa mental de la definición de derivada, apoyándose con el video anterior. A través de una clase, como estrategia de enseñanza, el docente resuelve varios ejemplos de las reglas de derivación: de la suma y de la cadena. **PG 08 Anexo 1**. A través de una clase, como estrategia de enseñanza, el docente resuelve varios ejemplos de las reglas de derivación: del producto y del cociente. **PG 08 Anexo 2**.	60 min 60 min 60 min	Laptop. Proyector. Pizarrón. Plumones.	Lista de cotejo 1.

Cierre	En binas, el estudiantado encontrará la derivada de funciones (regla de la suma y de la cadena) propuestas por el docente. **PG 08 Anexo 3**. En binas, el estudiantado encontrará la derivada de funciones (regla del producto y del cociente) propuestas por el docente. **PG 08 Anexo 4**.	120 min 120 min	Libreta Lápiz Libreta Lápiz	Lista de cotejo 2. Lista de cotejo 3.

Fuentes de consulta

BIBLIOGRÁFICA	VIDEOGRÁFICA	PÁGINAS WEB
Cálculo diferencial e integral. William Anthony Granville. Editorial Limusa.	https://www.youtube.com/watch?v=_6-zwdrqD3U	https://alumnos.cobachbcs.edu.mx/calculo-diferencial/

ELABORÓ

Ing. Alan Sebastián Díaz Gálvez

COLEGIO DE BACHILLERES DE CHIAPAS
PLANTEL 34
"ALAN SAC JUN"
CLAVE:07ECB0079X

REVISÓ

Lic. Sergio Santos Moreno

ANEXOS

PG 08 Anexo 1.

Ejercicios propuestos que el docente resuelve como ejemplos de las reglas de derivación: de la suma y de la cadena.

$$y = 3x^4 - 2x^2 + 8$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$y = \left(a - \frac{b}{x}\right)^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{4 - 9x}$$

PG 08 Anexo 2.

Ejercicios propuestos que el docente resuelve como ejemplos de las reglas de derivación: del producto y del cociente.

$$y = x\sqrt{a + bx}$$

$$y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$y = x^2\sqrt{5 - 2x}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{2 + 3x}{2 - 3x}}$$

PG 08 Anexo 3.

Ejercicios propuestos por el docente que el estudiantado resuelve en binas, encontrando la derivada de funciones aplicando las reglas de derivación: de la suma y de la cadena.

$$\mathbf{y = 4 + 3x - 2}x^{3}$$

$$\mathbf{y = 2}x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$$

$$\mathbf{y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^{2}}}$$

$$\mathbf{y = (2 - 3}x^{2})^{3}$$

$$\mathbf{y = (2 - 5x)^{\frac{3}{5}}}$$

$$\mathbf{y = \sqrt{1 - 2x}}$$

PG 08 Anexo 4.

Ejercicios propuestos por el docente que el estudiantado resuelve en binas, encontrando la derivada de funciones aplicando las reglas de derivación: del producto y del cociente.

$$\mathbf{y = x\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\mathbf{y = \frac{a - x}{a + x}}$$

$$\mathbf{y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}}$$

$$\mathbf{y = x^2\sqrt{3 - 4x}}$$

$$\mathbf{y = \sqrt{\frac{1 - cx}{1 + cx}}}$$

$$\mathbf{y = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt[3]{1 + 3x}}}$$

Lista de cotejo 1.

Para evaluar la elaboración del mapa mental de la definición de derivada, del video "Derivadas: clase completa desde cero".

Nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular :	**Sem/grup:**	
Integrantes del equipo: **1.**______________________________ **2.**______________________________	**Fecha:** **Puntaje:**	
Criterio	**Registro de cumplimiento**	
	SI	**NO**
Colabora y apoya a sus compañeros		
Demuestra interés en el desarrollo de la elaboración del mapa mental.		
Escucha con respeto a los integrantes del equipo.		
Reconoce la definición fundamental del cálculo.		
Conoce la definición de la interpretación geométrica de la derivada.		
Utiliza varias imágenes para representar el tema.		
Utiliza palabras conectoras para definir el cálculo.		
Logra concluir el mapa mental.		

Lista de cotejo 2.
Para evaluar los ejercicios propuestas por el docente, en binas el estudiantado encontrará la derivada de funciones (regla de la suma y de la cadena).

Nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular :	**Sem/grup:**	
Integrantes del equipo: **1.**______________________________ **2.**______________________________	**Fecha:**	
	Puntaje:	
Criterio	**Registro de cumplimiento**	
	SI	**NO**
Colabora y apoya a sus compañeros		
Demuestra interés en el desarrollo de los ejercicios.		
Escucha con respeto a los integrantes del equipo.		
Usa correctamente la fórmulas de la regla de la suma y de la cadena.		
Sabe establecer el procedimiento para encontrar la derivada de las funciones.		
Desarrolla el procedimiento para encontrar la derivada de las funciones.		
Obtiene el resultado correcto de la derivada de las funciones.		
Concluye todos los ejercicios para hallar la derivada de las funciones.		

Lista de cotejo 3.
Para evaluar los ejercicios propuestas por el docente, en binas el estudiantado encontrará la derivada de funciones (regla del producto y del cociente).

<table>
<tr><td>Nombre de la Unidad de Aprendizaje Curricular :</td><td colspan="2">Sem/grup:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Integrantes del equipo:
1.______________________________
2.______________________________</td><td colspan="2">Fecha:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Puntaje:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Criterio</td><td colspan="2">Registro de cumplimiento</td></tr>
<tr><td>SI</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>Colabora y apoya a sus compañeros</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Demuestra interés en el desarrollo de los ejercicios.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Escucha con respeto a los integrantes del equipo.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Usa correctamente la fórmulas de la regla del producto y del cociente.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Sabe establecer el procedimiento para encontrar la derivada de las funciones.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Desarrolla el procedimiento para encontrar la derivada de las funciones.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Obtiene el resultado correcto de la derivada de las funciones.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Concluye todos los ejercicios para hallar la derivada de las funciones.</td><td></td><td></td></tr>
</table>